

Министерство Образования Республики Беларусь

Белорусский Государственный Университет

Физический факультет

Кафедра физики твердого тела

Дипломная работа:

**Моделирование процессов
переноса заряда в проводящих
средах в градиентном магнитном
поле**

Студента 5 курса:

Павленко Александра Анатольевича

Научный руководитель:

Соболь Валерий Романович

Минск

2007

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	2
ГЛАВА 1.....	7
ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ И ЕГО РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПО ОБЪЕМУ ПЛАСТИНЧАТОГО ПРОВОДНИКА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ.....	7
1.1. Уравнение Лапласа и его решение в отсутствие магнитного поля.....	7
1.2. Тензорный характер кинетических коэффициентов и распределение тока в однородном магнитном поле.....	10
1.3. Вид уравнения Лапласа в магнитном поле, неоднородном вдоль потока заряда.....	10
1.4. Воздействие магнитного поля, неоднородного вдоль холловского направления, на электрический потенциал при протекании постоянного тока.....	19
ГЛАВА 2.....	27
СРАВНЕНИЕ РЕЗИСТИВНЫХ СВОЙСТВ ПРОВОДНИКОВ ПРИ ПРОТЕКАНИИ ПОСТОЯННОГО ТОКА В УСЛОВИЯХ ДЕЙСТВИЯ ОДНОРОДНОГО И НЕОДНОРОДНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ.....	27
2.1. Рассеивание энергии в рамках закона Джоуля-Ленца в условиях однородности кинетических коэффициентов.....	27
2.2. Учет эффекта неоднородного распределения плотности тока при градиентом магнитном поле в электрическом сопротивлении.....	30
ГЛАВА 3.....	31
ВЛИЯНИЕ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА КИНЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ.....	31
3.1. Тепловые эффекты в магнитосопротивлении при изотропном нагреве.....	31
3.2. Связь магнито и термоэлектрических явлений при анизотропии тепловода ..	33
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	40
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	41

Введение

В неравновесных условиях, в средах с металлическим типом проводимости (нормальные металлы, полуметаллы, полупроводники) электронные явления переноса заряда и тепла существенным образом определяются типом изоэнергетической поверхности носителей заряда – поверхностью Ферми. Поверхность Ферми (ПФ) отображает закон дисперсии носителей заряда в пространстве волновых векторов (импульсов), при этом, непосредственно в кинетических явлениях, участвуют электроны из диапазона узкого слоя вблизи уровня Ферми порядка kT (k – постоянная Больцмана, T – температура). Глубинные внутренние электроны могут поглощать энергию квантов света с переходом на свободные состояния над уровнем Ферми, характеризуя оптические свойства веществ. То обстоятельство, что электроны могут переносить и заряд, и тепло приводит к взаимосвязи электрических и тепловых явлений. В условиях различного сочетания электрических и тепловых сил, стимулирующих движение заряда, возникают так называемый эффект Зеебека (градиент температуры в ограниченном проводнике, при отсутствии тока, приводит к возникновению термоэлектродвижущей силы), эффект Пельтье (поток носителей заряда приводит к возникновению потока тепла), эффект Томсона и другие. На этих эффектах работают широко известные генераторы тока, термоэлектрические холодильные системы и т.д. Особенности изоэнергетической поверхности электронов проводимости наиболее полно проявляются при низких температурах.

Существенно, что кинетические электронные явления зависят и от механизмов рассеяния носителей заряда. В твердом теле блоховский электрон, по квантовым представлениям, претерпевает изменение состояния своего движения только при взаимодействии с дефектами кристаллической решетки. Примесные атомы, вакансии, дислокации являются центрами рассеивания и приводят к конечной величине электрического сопротивления и теплопроводности. Тепловые колебания решетки, которые часто можно представить в виде квазичастиц – фононов, также дают вклад в рассеяние электронов. Кроме этого фононы не только рассеивают электроны, но и сами переносят тепло. Фононные механизмы теплопроводности проявляют себя при теплопередаче в диэлектриках. В области низких температур, вклад решеточных механизмов передачи тепла незначителен по сравнению с

электронным механизмом. В металлах роль фононов в теплопередаче гораздо меньше, чем в полуметаллах и полупроводниках. В ряде случаев, для сред с меньшей концентрацией электронов проводимости, можно пренебречь вкладом фононов в теплоперенос, как при низких, так и при комнатных температурах.

Следует отметить, что особенно сильно многообразие процессов взаимодействия электрических и тепловых эффектов проявляется в условиях анизотропии электронных свойств материалов. Анизотропия может быть как естественной, связанной с симметрией кристаллической решетки (все материалы с некубической симметрией являются анизотропными), так и искусственно наведенной, которая возникает в результате воздействия внешнего магнитного поля. Ее физическая причина: действие силы Лоренца на движущуюся заряженную частицу. В металлах, принадлежащих к кубической сингонии (Al, Cu, Au и т.д.) и имеющих гранецентрированную или объемцентрированную решетку, кинетические коэффициенты в обычном случае – скалярные величины, превращаются в магнитном поле в тензора 2-ого ранга. Масштаб влияния магнитного поля определяется его эффективной величиной, которую оценивают через параметр $\omega\tau$ ($\omega = eB/m$, где ω – ларморовская частота, e и m – заряд и масса электрона, B – индукция магнитного поля в материале, τ – время свободного пробега, в течение которого происходит движение частицы без изменения квазиимпульса). Магнитное поле считают сильным, если циклотронная частота значительно больше времени свободного пробега. С этим параметром связан другой параметр эффективности магнитного поля – l/r ($\omega\tau = l/r$, где l – длина свободного пробега, $l = v\tau$, v – фермиевская скорость частицы, находящейся на поверхности Ферми, r – ларморовский радиус, $r = p/eB$, p – квазиимпульс Ферми). Если $\omega\tau \gg 1$, то кинетические коэффициенты в магнитном поле являются тензорными характеристиками, при $\omega\tau \ll 1$ действие магнитного поля незначительное и его вклад в явление переноса можно рассматривать в линейном приближении. Следует отметить, что теория электронных явлений в магнитном поле развита только для двух указанных диапазонов. Кроме этого существует ряд трудностей с методологией измерения и интерпретацией подобных явлений. Сложность обусловлена тем, что время свободного пробега при переносе тепла и переносе заряда электронов следует рассматривать как два различных параметра. По сути существует понятие время свободного пробега, для

переноса заряда, и время свободного пробега, для переноса тепла. Такое разделение обусловлено тепловыми механизмами рассеивания. Любой акт, т.е. встреча электронов с фононами приводит к эффекту его рассеивания в тепловых процессах. При переносе заряда, акт рассеивания на фоне не означает, что электрон изменил свой импульс на противоположный, поскольку импульс фонона на несколько порядков меньше импульса Ферми. В области низких и высоких температур длины свободного пробега для переноса заряда и тепла совпадают, и выполняется закон Видемана-Франца. В ряде случаев приближение закона Видемана-Франца распространяют и на промежуточную область температур. Воздействие магнитного поля на движущиеся заряженные частицы приводит к появлению различных поперечных гальвано, термомагнитных эффектов типа Нерста, Риги-Ледюка, Эттингсхаузена.

При проведении низкотемпературных экспериментов по гальваномагнитным явлениям, в средах с металлическим типом проводимости и высокими уровнями химической чистоты и физического совершенства, возникают определенные трудности технического характера, связанные с необходимостью использования больших плотностей тока, пропускаемого через исследуемый образец. Большие плотности необходимы для того, чтобы получить устойчивую картину распределения сигналов за пределами диапазона случайных ошибок. В чистых материалах, длина свободного пробега носителей заряда возрастает до такой степени, что сопротивление при низких температурах уменьшается в десятки и сотни тысяч раз. Кроме этого, условия монтажа образцов требуют применения диэлектрических держателей, теплопроводность которых гораздо меньше материала образца, что приводит к ухудшению теплообмена с окружающей средой. Большие плотности тока, используемые для увеличения электрических сигналов, и ограниченность условий теплообмена, приводящих к нарушению режима изотермичности по объему, могут вызвать дополнительные паразитные термоэлектрические поля и погрешности.

Неоднородное магнитное поле находит применение в ряде случаев при решении задач прикладного и фундаментального характера. Градиентное магнитное поле используется в установках по определению магнитных характеристик веществ, в тензометрии, в термогравиметрии и т.д. Неоднородность магнитного поля фактически присутствует в значительном количестве устройств работающих на принципах преобразования и

использования энергии этого поля. Любая магнитная система создающая поле в условиях направленного движения носителей заряда – протекание тока по проводникам, генерирует поле с той или иной степенью неоднородности. Чтобы получить поле с высокой однородностью, применяют системы типа катушек Гельмгольца или используют малые участки объема внутри длинных соленоидов.

Кроме положительной роли, выполняемой неоднородным полем, в перечисленных ранее устройствах, существует также и отрицательная сторона при наличии неоднородности – последствия связанные с протеканием тока в неоднородном поле. Особенно значительна отрицательная сторона воздействия градиентного магнитного поля на протекание тока в условиях низких температур.

При больших длинах свободного пробега носителей заряда, которые обусловлены вымораживанием фононных мод, условия сильного магнитного поля легко выполняется. Соответственно, эффекты неоднородности поля приводят к перераспределению линий тока в проводнике. Это означает, что магнитное поле изменяется по величине от максимального значения до нуля через толщину обмотки криогенного магнита и воздействует на электрические свойства этого магнита. Как показали предшествующие исследования, безвихревой характер электрического стационарного поля, в условиях неоднородной проводимости, вызванной градиентом поля, приводит к вихревому характеру протекания постоянного электрического поля. Установлено, что поперечное току магнитное поле, которое изменяется вдоль потока заряда, приводит к явлению скинирования постоянного электрического тока [1-3]. Другими словами, плотность тока становится неоднородной по поперечному сечению, и основное количество токовых линий концентрируется у одной из холловских граней. Зависимость плотности тока от холловской координаты вдоль оси y отвечает экспоненте.

Цель работы заключалась в поэтапном рассмотрении характера воздействия магнитного поля на кинетические свойства материалов с металлическим типом проводимости с точки зрения нахождения алгоритмов оценки и изменения резистивных свойств криопроводников, используемых для изготовления низкотемпературных магнитов. Магнитное поле, как технологическая составляющая систем, на основе эффекта ядерного магнитного резонанса (например, медицинские ЯМР томографы, лабораторные установки), мощных соленоидов, как магнитных систем для

научных исследований (ускорители частиц, детекторы) является фактором, усиливающим диссипативные процессы в низкотемпературных проводниках. Дополнительное воздействие со стороны магнитного поля на электрическое сопротивление заключается в том, что при существовании градиента этого поля возникает новый вид дрейфа заряженных частиц и перераспределение плотности тока, фактически означающее уменьшение поперечного сечения проводника. Также в работе рассмотрены некоторые вопросы взаимосвязи гальвано и термомагнитных явлений в длинных проводниках при ограниченности условий теплоотвода выделяемой джоулевой мощности, фактически означающей анизотропию тепловых свойств и существование неоднородного температурного поля по поперечному сечению проводника.

ГЛАВА 1

Потенциал электрического поля и его распределение по объему пластинчатого проводника в магнитном поле

В главе рассмотрен характер протекания постоянного электрического тока по проводнику из нормального металла, при воздействии на движение носителей заряда поперечного току магнитного поля, которое изменяется в холловском направлении. На основе феноменологические уравнения Максвелла для электромагнитного поля постоянного тока, протекающего по низкотемпературному проводнику, находящемуся в градиентном магнитном поле, требовалось получить уравнение типа Лапласа для распределения электрического потенциала по объему проводника и оценить возможные решения этого уравнения, применительно к оценке резистивных свойств криопроводников, используемых в качестве обмоток низкотемпературных электромагнитов.

1.1. Уравнение Лапласа и его решение в отсутствие магнитного поля

В качестве модели выбран пластинчатый проводник с прямоугольным поперечным сечением и с достаточно большой длиной, ось x – направление тока, ось y – направление поля Холла, ось z – направление магнитного поля H (Рис. 1.1).

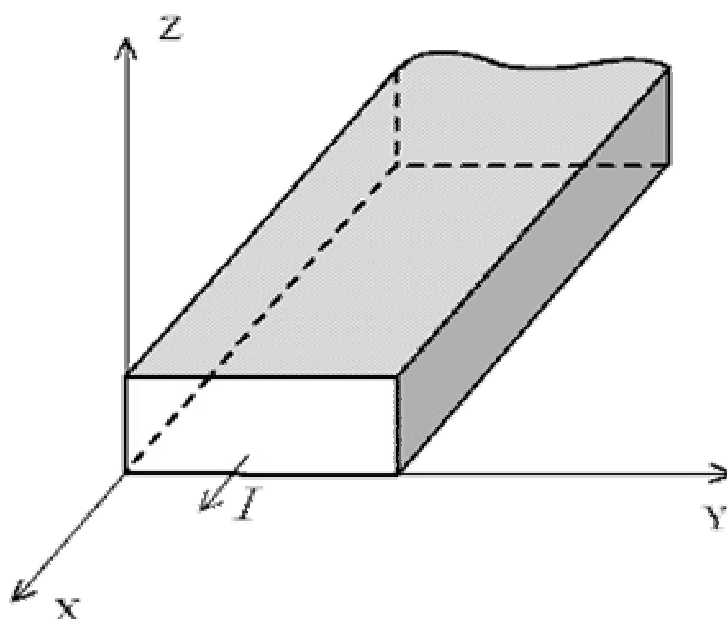


Рис. 1.1 Геометрия эксперимента при изучении поперечных гальвано, термомагнитных явлений в проводящих средах

Поскольку длина проводника выбирается достаточно большой, при дальнейшем рассмотрении возможен ряд упрощений. Используем систему уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot}E = 0, \operatorname{rot}H = j, j = \sigma E, \sigma = 1/\rho, \quad (1.1)$$

где j – вектор плотности тока;

H – вектор напряженности магнитного поля;

E – вектор напряженности электрического поля;

σ – удельная электропроводимость;

ρ – удельное электрическое сопротивление среды.

Не теряя общности рассмотрения, в качестве первого шага используем проводящий материал, характеризующийся квазисферической поверхностью Ферми. Такой подход оправдан в том смысле, что типичный криопроводник из алюминия имеет замкнутую поверхность Ферми, которая в целом несколько анизотропная, но для поликристаллического материала, состоящего из большого количества хаотически разориентированных кристаллитов, может быть принята, как изотропная. Соответственно, тензор проводимости можно выбрать в виде [3-5]:

$$\sigma_{ik} = \sigma_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{1+(\omega\tau)^2} & \frac{\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2} & 0 \\ -\frac{\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2} & \frac{1}{1+(\omega\tau)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

при этом:

$$\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}, \quad (1.3)$$

здесь σ_0 – проводимость в нулевом магнитном поле;

n – концентрация электрона;

ω – ларморовская частота;

e и m – заряд и масса электрона.

Применяя тензорное соотношение связи между электрическим током и полем, а также условие неразрывности для плотности потока заряда

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad (1.4)$$

запишем составляющие дивергенции вектора плотности потока заряда вдоль координатных осей:

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} = (\sigma_{xx})'_x \varphi'_x + \sigma_{xx} \varphi''_{xx} + (\sigma_{xy})'_x \varphi'_y + \sigma_{xy} \varphi''_{yx}, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial j_y}{\partial y} = (\sigma_{yx})'_y \varphi'_x + \sigma_{yx} \varphi''_{xy} + (\sigma_{yy})'_y \varphi'_y + \sigma_{yy} \varphi''_{yy}, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial j_z}{\partial z} = (\sigma_{zz})'_z \varphi'_z + \sigma_{zz} \varphi''_{zz}. \quad (1.7)$$

Используя составляющие (1.5), (1.6), (1.7) не представляет труда получить общее выражение для электрического потенциала в виде модифицированного уравнения второго порядка в частных производных, которое напоминает уравнение Лапласа:

$$\varphi''_{xx} + \varphi''_{yy} + \varphi''_{zz} = 0. \quad (1.8)$$

Граничные условия к этому уравнению можно обеспечить непрерывностью потока зарядов на поверхности, т.е. заряды не проходят через поверхность проводника вне токопроводящих контактов, и суммарный ток через поперечное сечение равен току генератора:

$$j_y \Big|_{x=0}^{x=l} = 0, \quad (1.9)$$

$$j_x = \text{const}$$

Для указанных граничных условий можно утверждать, что электрический потенциал является линейной функцией координат. Более того, при отсутствии поперечного тока вдоль холловского направления на боковых гранях, автоматически следует, что поперечный ток отсутствует и в объеме проводника. В данных условиях, как легко убедиться, вид электрического потенциала следующий:

$$\varphi = \frac{Ix}{bt\sigma_0} + C, \quad (1.10)$$

где I – сила тока;

l , b и t – длина, ширина и высота рабочей области проводника.

1.2. Тензорный характер кинетических коэффициентов и распределение тока в однородном магнитном поле

В следующем приближении исследуем характер потенциала φ при существовании магнитного поля, однородного по объему образца ($B = \text{const}$). Учтем анизотропию проводимости через тензорные материальные соотношения связи между плотностью тока и напряженностью магнитного поля. Используем приближение квазисферической поверхности Ферми, которое справедливо для кубических по структуре металлов с валентностью три и более (криопроводник из поликристаллического алюминия).

В условиях магнитного поля тензор проводимости характеризуется соотношением (1.2) и соответственно из условий неразрывности для плотности получаем дифференциальное уравнение для потенциала

$$\sigma_{xx} \varphi''_{xx} + \sigma_{yy} \varphi''_{yy} + \sigma_{zz} \varphi''_{zz} = 0, \quad (1.11)$$

в приближении малости t по сравнению с b , пренебрежем движением частиц вдоль B . С учетом уравнений (1.5), (1.6), (1.7) и граничных условий (1.9) решение для потенциала электрического поля φ

$$\varphi = \frac{I(x + \beta y)}{bt\sigma_0} + C. \quad (1.12)$$

Такое решение отвечает линейной зависимости потенциала не только от координаты вдоль транспортного направления, но и от координаты вдоль холловского направления. Напряженность поля при этом остается постоянной по объему и не одинаковой вдоль потока заряда и поперек него.

1.3. Вид уравнения Лапласа в магнитном поле, неоднородном вдоль потока заряда

Как и ранее в качестве модели для аналитического исследования и численного расчета, сформулированной задачи, выбран пластинчатый проводник с прямоугольным поперечным сечением (Рис. 1.2). Длина проводника достаточно велика, чтобы можно было игнорировать концевые эффекты, связанные с неоднородностью токовых линий в области контактов.

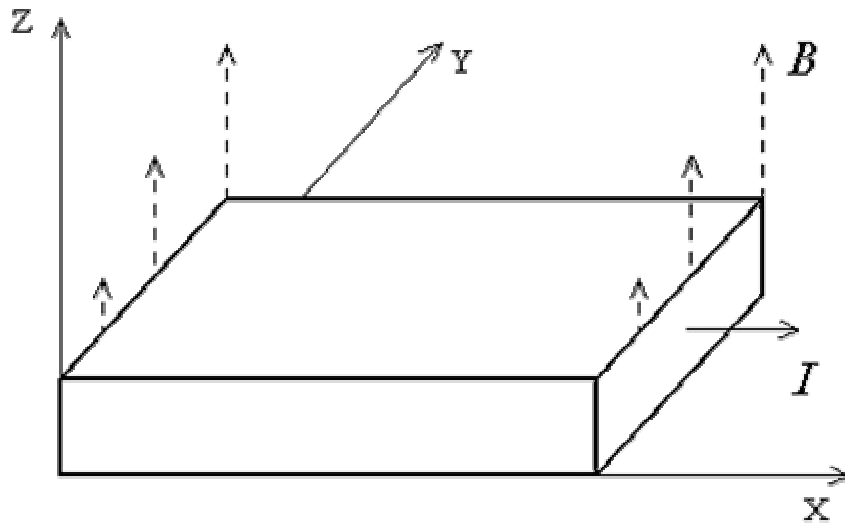


Рис. 1.2. Модельная геометрия эксперимента в поперечном магнитном поле, неоднородном в холловском направлении.

При учете неоднородности B , изменяющегося линейно вдоль оси x , уравнение Лапласа для φ можно представить, как

$$\varphi_{xx}'' + \varphi_{yy}'' - \frac{2\beta}{1+\beta^2} K \varphi_x' + \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} K \varphi_y' = 0. \quad (1.13)$$

Его можно разрешить аналитически после упрощения при $\beta \gg 1$ и при $K = d\beta/dx$ оставляя максимальные по величине члены получаем

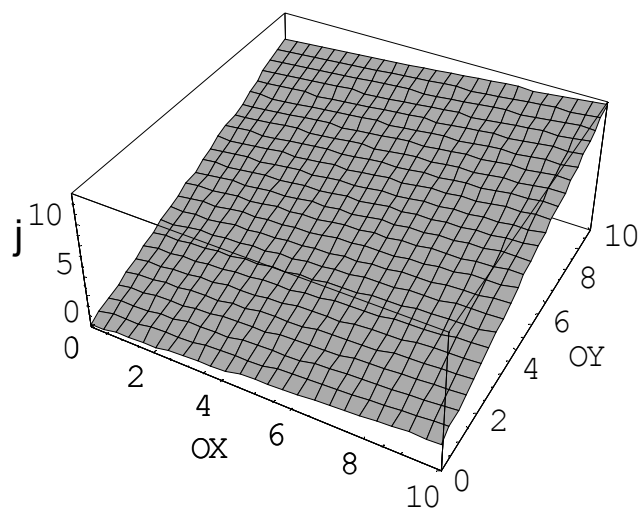
$$\varphi_{xx}'' + \varphi_{yy}'' - K \varphi_y' = 0. \quad (1.14)$$

Применив метод разделения получим окончательный вид потенциала электрического поля

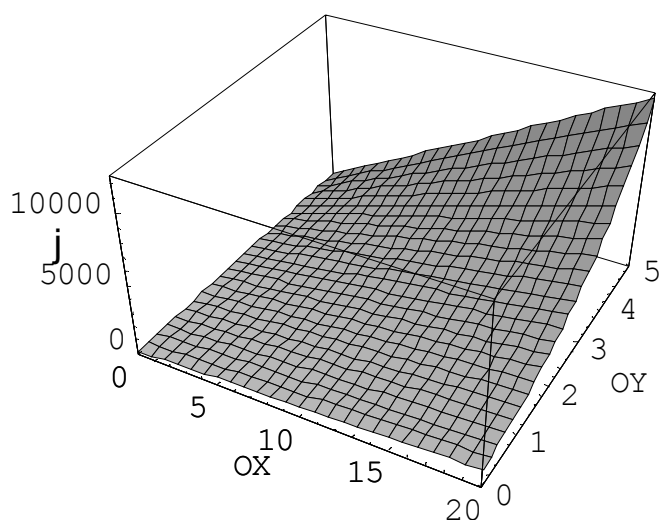
$$\varphi = I\beta e^{ky} / \sigma_0 t (e^{kb} - 1), \quad (1.15)$$

где $\beta = \beta_0 + Kx$.

Целесообразно сравнить характер распределения потенциала электрического поля в однородном и неоднородном магнитном поле при условии, что оно изменяется линейно вдоль транспортного направления. Представим изображения потенциала как функцию двух переменных (Рис. 1.3).



а)



б)

Рис. 1.3. Пространственная картина φ в однородном магнитном поле а) и неоднородном магнитном поле б) при его градиентности вдоль потока заряда.

Для случая градиентного магнитного поля нелинейный характер пространственной зависимости потенциала означает пространственную нелинейность и неоднородность электрического поля, что в общем случае свидетельствует о перераспределении линий тока.

Выполненный расчет и его сопоставление с результатами моделирования по распределению электрического потенциала для постоянного тока в длинном проводнике прямоугольного сечения показывает, что метод разделения переменных позволяет определить в первом приближении характер протекания тока при действии градиентного поперечного магнитного поля на ток. Для длинного образца при

сравнительной малости толщины по отношению к ширине, целесообразно использовать модифицированное дифференциальное уравнение 2-го порядка в частных производных, предполагая двумерность электрических свойств объемного проводника. Такое распределение потенциала свидетельствует о вихревой структуре постоянного тока проводимости в стационарном электрическом поле.

В условиях градиентного поля, линейно изменяющегося вдоль холловского направления

$$\frac{dB}{dy} = K' \quad (1.16)$$

где K' – некоторый постоянный коэффициент;

Используя составляющие (1.5), (1.6), (1.7), не представляет труда получить общее выражение для электрического потенциала в виде модифицированного уравнения второго порядка в частных производных, которое напоминает уравнение Лапласа. Это уравнение содержит дополнительные элементы, учитывающие неоднородность проводимости, стимулированную действием градиентного магнитного поля. Полученное уравнение является достаточно сложным для анализа. С целью его упрощения, пренебрежем движением носителей заряда вдоль координаты z , вдоль магнитного поля. Действительно, поскольку толщина пластинчатого образца меньше его ширины и существенно меньше длины, естественно в первом приближении предположить, что потенциал электрического поля не зависит от оси z :

$$\varphi_{xx}'' + \varphi_{yy}'' - \frac{K}{\beta^2 + 1} ((1 - \beta^2)\varphi_x' + 2\beta\varphi_y') = 0, \quad (1.17)$$

где K – постоянный коэффициент, $K = \frac{d\beta}{dy}$. Здесь β – коэффициент, связывающий ларморовский радиус и длину свободного пробега и равный произведению времени свободного пробега и циклотронной частоты.

Принимая во внимание, что в условиях сильного магнитного поля ларморовский радиус значительно меньше длины свободного пробега и $\beta \gg 1$, уравнение (1.17) обретает следующий вид:

$$\varphi_{xx}'' + \varphi_{yy}'' + K\varphi_x' - \frac{2K}{\beta}\varphi_y' = 0. \quad (1.18)$$

Для решения этого уравнения применяем метод разделения переменных (метод Фурье) и искомую функцию φ представляем в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит от одного аргумента:

$$\varphi = X(x)Y(y). \quad (1.19)$$

Подстановка в уравнение позволяет получить основное соотношение, связывающее две пробные функции:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{KX'}{X} - \frac{2KY'}{\beta Y} = 0. \quad (1.20)$$

Поскольку функции X и Y являются функциями одной переменной, перегруппировав данное уравнение, можно убедиться, что переменная разделения C не должна зависеть ни от X , ни от Y и является константой:

$$\begin{aligned} \frac{X''}{X} + \frac{KX'}{X} &= C \\ \frac{Y''}{Y} - \frac{2KY'}{\beta Y} &= -C \end{aligned} \quad (1.21)$$

Частный вид решения системы зависит от граничных условий и самой константы разделения. В качестве первого приближения полагаем константу разделения равной нулю. Соответственно, используя систему характеристических уравнений, для системы однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, убеждаемся, что вид решения для функций X и Y – следующий:

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 + C_2 e^{-Kx} \\ Y(y) &= C_1^* + C_2^* e^{2Ky/\beta} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Подставим уравнения (1.22) в уравнение (1.19). Соответственно, выражение для пространственного распределения искомого потенциала можно представить как

$$\varphi = D_1 + D_2 e^{2Ky/\beta} + D_3 e^{-Kx} + D_4 e^{-Kx+2Ky/\beta}. \quad (1.23)$$

При записи выражения (1.23) по существу использовалось то, что в пределах рабочей области образца параметр β изменяется в соответствии с выражением $\beta = \beta_0 + Ky$. Полагалось, что величина поля в начальной точке достаточно велика, а линейный вклад от переменной y незначителен, что позволяло постулировать параметр β , как константу, независимую от координаты y .

Прежде чем проводить дальнейшее исследование полученного уравнения и его решения, проанализируем закономерности протекания тока в данном проводнике, в условиях однородного магнитного поля. Уравнение (1.20) трансформируется к тривиальному уравнению, описывающему электрический потенциал при протекании постоянного тока в однородном поле при устремлении K к нулю

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0. \quad (1.24)$$

Граничные условия к этому уравнению можно обеспечить непрерывностью потока зарядов на поверхности. Заряды не проходят через поверхность проводника вне токопроводящих контактов, и суммарный ток через поперечное сечение равен току генератора:

$$j_y \Big|_{y=b}^{x=0} = 0, \quad (1.25)$$

$$j_x = const$$

Возвращаясь к выражению для потенциала, полученному в условиях неоднородности проводимости

$$\varphi = D_1 + D_2 e^{2Ky/\beta} + D_3 e^{-Kx} + D_4 e^{-Kx+2Ky/\beta}, \quad (1.27)$$

можно отметить, что в полученном решении также присутствуют члены, описывающие пространственную зависимость потенциала вдоль транспортного и поперечного к нему холловского направления.

Чтобы найти потенциал электрического поля и определить константы D_1, D_2, D_3, D_4 , зададим рабочую область образца, как диапазон изменения координат x, y, z :

$$\begin{aligned} x &\in [0; l] \\ y &\in [0; b], \\ z &\in [0; t] \end{aligned} \quad (1.28)$$

где l, b и t – длина, ширина и высота рабочей области проводника.

Применим граничные условия, учитывающие отсутствие протекания тока через боковые холловские грани.

$$j_y \Big|_{y=0}^{x=0} = 0, \quad (1.29)$$

$$j_y \Big|_{y=b}^{x=0} = 0. \quad (1.30)$$

Из условий (1.29) и (1.30), получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \sigma_{yx}(D_3 + D_4 e^{2Kb/\beta}) &= \frac{2\sigma_{yy} e^{2Kb/\beta}}{\beta} (D_2 + D_4) \\ \sigma_{yx}(D_3 + D_4) &= \frac{2\sigma_{yy}}{\beta} (D_2 + D_4) \end{aligned} \quad (1.31)$$

Разделив первое уравнение на второе, легко убедиться, что:

$$D_3 = 0, \quad (1.32)$$

$$D_2 = D_4 \left(\frac{\beta\sigma_{yx} - 2\sigma_{yy}}{2\sigma_{yy}} \right), \quad (1.33)$$

Силу тока протекающего через сечение проводника представим в интегральном виде и используем это выражение для определения констант интегрирования:

$$I = \int \int j_x(0) dy dt. \quad (1.34)$$

Подставляя равенства (1.5) и (1.28) в уравнение (1.34), можно выразить D_4 через силу тока I :

$$D_4 = \frac{2I(\beta^2 + 1)}{t\sigma_0\beta(e^{2Kb/\beta} - 1)(2 - \beta^2)}. \quad (1.35)$$

С учетом полученного соотношения, D_2 имеет следующую форму записи:

$$D_2 = \frac{I(\beta^2 + 1)(\beta^2 + 2)}{t\sigma_0\beta(e^{2Kb/\beta} - 1)(\beta^2 - 2)}. \quad (1.36)$$

Учтем, что D_1 есть константа и может быть приравнена к нулю. Тогда окончательное уравнение для потенциала электрического поля, равно

$$\varphi = \frac{Ie^{2Ky/\beta} (\beta^2 + 1)(\beta^2 - 2e^{-Kx} + 2)}{t\sigma_0\beta(e^{2Kb/\beta} - 1)(\beta^2 - 2)}. \quad (1.37)$$

Используя D_1, D_2, D_3, D_4 , получим выражения для плотности тока вдоль координат x и y .

$$j_x = \frac{2Ike^{2Ky/\beta} (-\beta^2 + \beta e^{-Kx} - 2)}{t\beta^2 (e^{2Kb/\beta} - 1)(2 - \beta^2)}, \quad (1.38)$$

$$j_y = \frac{2Ike^{2Ky/\beta}(-\beta^2 + \beta(\beta^2 + 2)e^{-Kx} - 2)}{t\beta^3(e^{2Kb/\beta} - 1)(2 - \beta^2)}. \quad (1.39)$$

Используя выражения для потенциала и плотности тока - (1.37), (1.38), (1.39); было численно смоделировано поведение потенциала и плотности тока, при некоторых параметрах задачи, которое представлено на графиках:

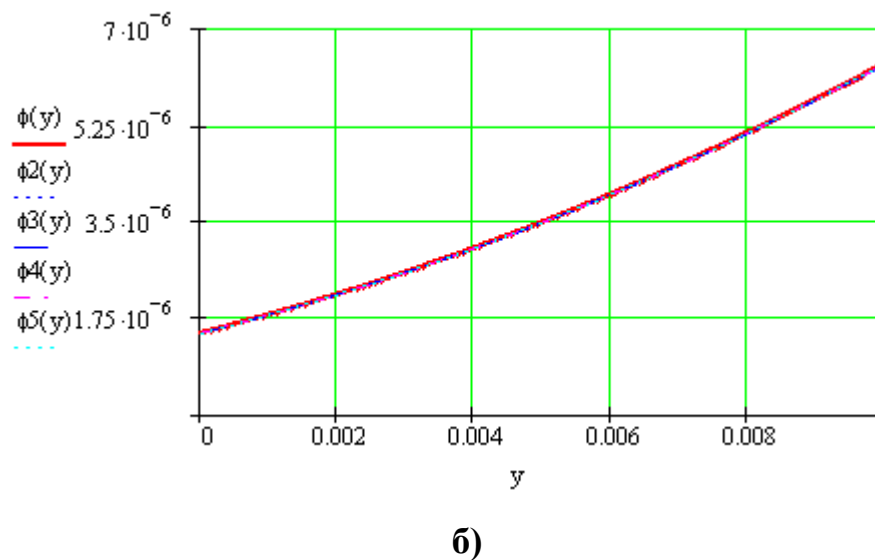
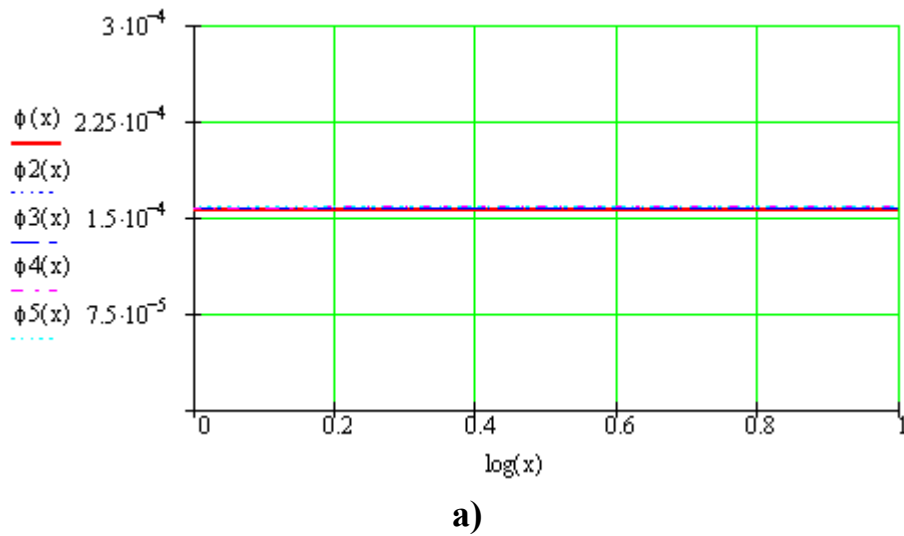
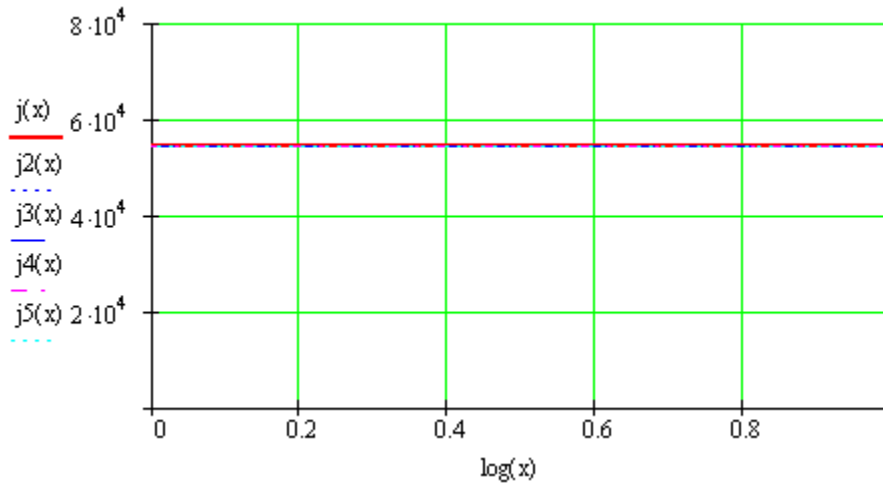
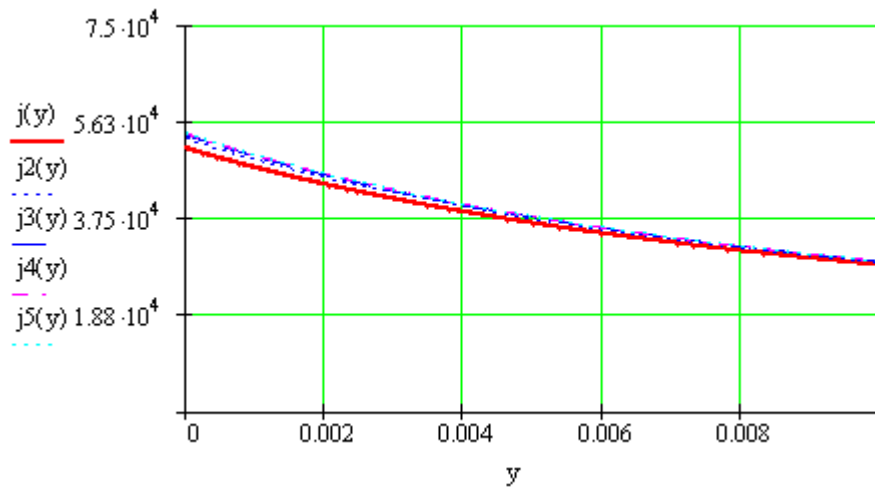


Рис. 1.4. Зависимость потенциала электрического поля φ в направлении протекания тока а) и перпендикулярно ему б).



а)



б)

Рис. 1.5. Зависимость плотности тока (а) j_x , (б) j_y в направлении (а) протекания тока; (б) перпендикулярно протеканию тока.

При построении графиков использовались следующие параметры:

$$\varphi(x) \text{ и } j(x) \quad - \quad y = 0;$$

$$\varphi_2(x) \text{ и } j_2(x) \quad - \quad y = 0,2 * 10^{-2};$$

$$\varphi_3(x) \text{ и } j_3(x) \quad - \quad y = 0,4 * 10^{-2};$$

$$\varphi_4(x) \text{ и } j_4(x) \quad - \quad y = 0,6 * 10^{-2};$$

$$\varphi(y) \text{ и } j(y) \quad - \quad x = 0;$$

$$\varphi_2(y) \text{ и } j_2(y) \quad - \quad x = 10^{-2};$$

$$\varphi_3(y) \text{ и } j_3(y) - x = 2 \cdot 10^{-2};$$

$$\varphi_4(y) \text{ и } j_4(y) - x = 3 \cdot 10^{-2};$$

$$K = 10^2 \text{ м}^{-1}; B_0 = 1; b = 10^{-2} \text{ м}; t = 0,1 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$\tau = 10^{-10} \text{ с}; I = 10 \text{ А}; \rho_0 = 10^{-12} \text{ Ом} \cdot \text{м}.$$

Вид потенциала, как функции x и y , показывает, что при таком рассмотрении основной вклад в перенос заряда дает поле Холла, которое отличается от случая с однородным магнитным полем. Действительно, в этом рассмотрении зависимость потенциала от координаты y – нелинейная. Это вызвано большой чувствительностью движения носителей заряда к действию скрещенных электрического и магнитного полей, что и приводит к значительному превышению поля Холла над электрическим полем вдоль транспортного направления в однородном магнитном поле.

1.4. Воздействие магнитного поля, неоднородного вдоль холловского направления, на электрический потенциал при протекании постоянного тока

Для общности рассмотрения проанализируем вклад в электрическое поле и плотность потока заряда составляющей потенциала и ее изменения вдоль транспортного направления. Для этого учтем пространственную зависимость параметра β от координаты в холловском направлении. Соответственно, как показывает анализ первое из уравнений при разделении переменных остается неизменным, и записывается в той же форме, как и ранее, то есть

$$\frac{X''}{X} + \frac{KX'}{X} = 0, \quad (1.40)$$

Второе уравнение следует представить в новой форме

$$\frac{Y''}{Y} - \frac{2KY'}{(\beta_0 + Ky)Y} = 0. \quad (1.41)$$

Интегрирование выражения (1.41) приводит к функции

$$Y = \frac{C_1^*}{K} (\beta_0 + Ky)^3 + C_2^*. \quad (1.42)$$

Соответственно, общий вид электрического потенциала может быть отобращен как

$$\varphi = \left(C_1 + C_2 e^{-Kx} \right) \left(\frac{C_1^*}{K} (\beta_0 + Ky)^3 + C_2^* \right), \quad (1.43)$$

или после некоторого преобразования

$$\varphi = C_2 C_2^* e^{-Kx} + C_2 \frac{C_1^*}{K} e^{-Kx} (\beta_0 + Ky)^3 + C_1 \frac{C_1^*}{K} (\beta_0 + Ky)^3 + C_1 C_2^*. \quad (1.44)$$

Для определения констант интегрирования, применим правило предельного перехода, которое заключается в том, что решение для неоднородного магнитного поля должно при уменьшении параметра неоднородности монотонно сходиться к известному решению, характерному для однородного магнитного поля. Другими словами, при устремлении величины градиента магнитного поля к нулю, выражение для потенциала должно трансформироваться к полученному ранее выражению вида:

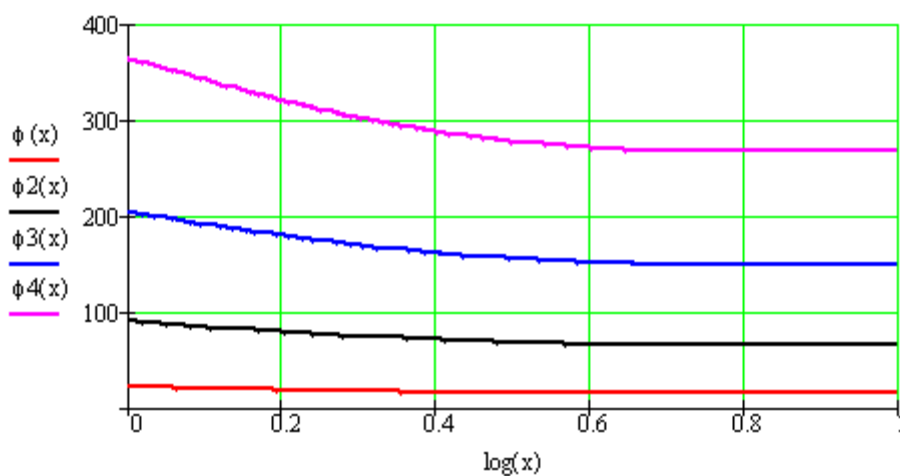
$$\varphi = C_1(x + \beta_0 y) + C_2. \quad (1.45)$$

Преобразование (1.45) в соответствии с обсужденным принципом сходимости решений, позволило определить вид констант интегрирования удовлетворяющих условиям перехода. Соответственно потенциал электрического поля постоянного тока в проводнике с прямоугольным поперечным сечением в условиях действия на ток градиентного магнитного поля, неоднородного вдоль холловского направления можно представить с помощью соотношения:

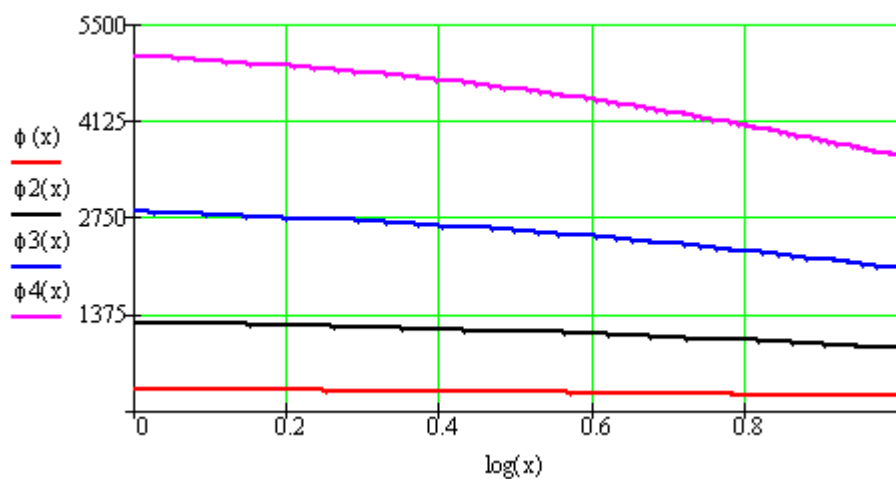
$$\varphi = -\frac{D}{K} e^{-Kx} + \frac{D}{6\beta_0 K} e^{-Kx} (\beta_0 + Ky)^3 + \frac{D}{6\beta_0 K} (\beta_0 + Ky)^3. \quad (1.46)$$

В данной форме записи зависимость потенциала от координат x и y является характерной для любого уровня неоднородности и определяет качественные закономерности протекания тока через поперечное сечение проводника. Естественно, общая нелинейность φ от x и y указывают на более сложный и неоднородный характер распределения плотности тока по объему. Для установления качественных закономерностей воспользуемся

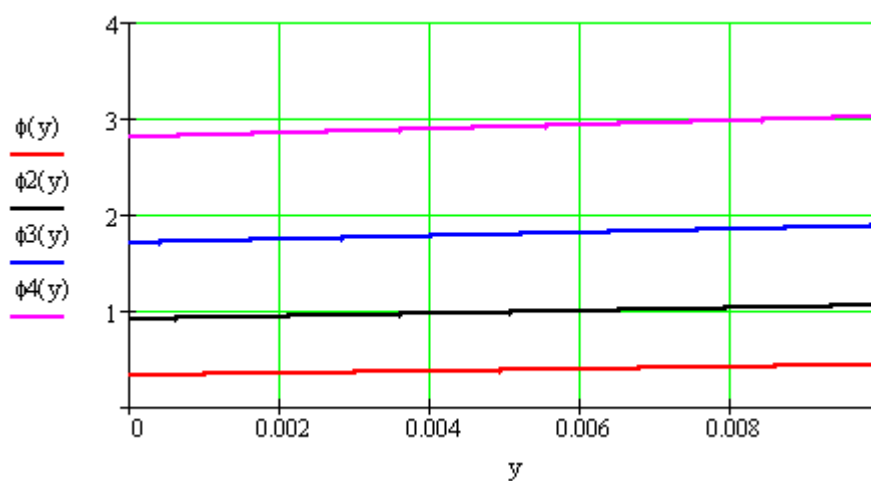
полученным выражением для численного моделирования и оценочного построения графиков, постулируя константу интегрирования D равной единице:



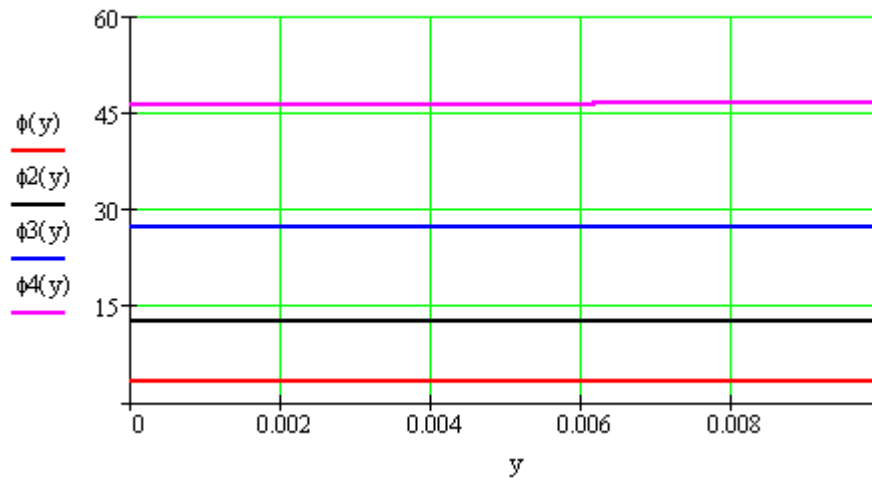
a)



б)



в)



г)

Рис. 1.6. Зависимость потенциала электрического поля φ вдоль направления протекания тока а) и перпендикулярному протеканию тока б) при $D=1$ и различных значения K , см^{-1} : (а), (б) 1; (в), (г) 0,1.

При построении графиков использовались следующие параметры:

$$\varphi(x) - \beta_0 = 10, y = 0;$$

$$\varphi_2(x) - \beta_0 = 20, y = 0,2 \cdot 10^{-2};$$

$$\varphi_3(x) - \beta_0 = 30, y = 0,4 \cdot 10^{-2};$$

$$\varphi_4(x) - \beta_0 = 40, y = 0,6 \cdot 10^{-2};$$

$$\varphi(y) - \beta_0 = 10, x = 0;$$

$$\varphi_2(y) - \beta_0 = 20, x = 10^{-2};$$

$$\varphi_3(y) - \beta_0 = 30, x = 2 \cdot 10^{-2};$$

$$\varphi_4(y) - \beta_0 = 40, x = 3 \cdot 10^{-2};$$

Для конкретизации ситуации вычислим D , используя выражения (1.29), (1.30), (1.34), (1.46). В результате чего:

$$D = \frac{24IK\beta_0(\beta_0^2 + 1)}{t(\beta_0^4 - (\beta_0 + Ky)^4 + 24K\beta_0b + 8\beta_0((\beta_0 + Kb)^3 - \beta_0^3))}. \quad (1.47)$$

Подставляя (1.47) в (1.46), находим общий вид потенциала:

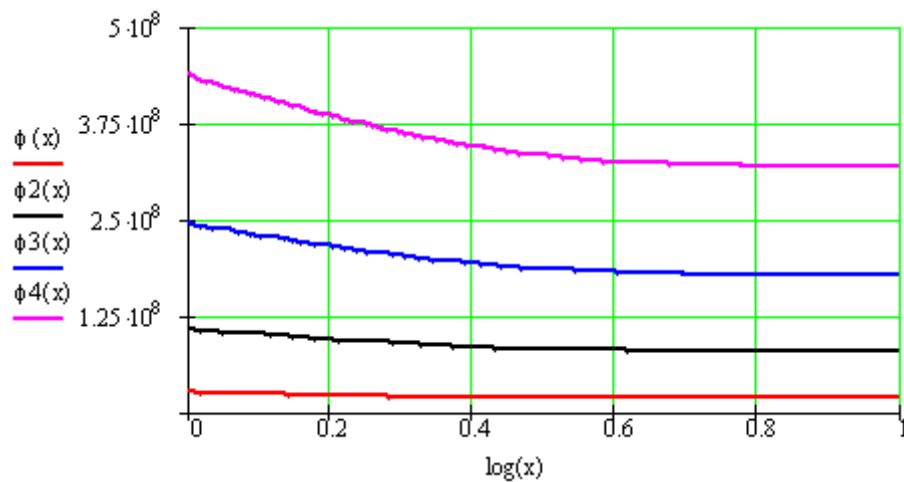
$$\varphi = \frac{4I(-6\beta_0 e^{-Kx} + (\beta_0 + Ky)^3 (e^{-Kx} + 1)(\beta_0^2 + 1))}{t(\beta_0^4 - (\beta_0 + Ky)^4 + 24K\beta_0 b + 8\beta_0((\beta_0 + Kb)^3 - \beta_0^3))}. \quad (1.48)$$

Исходя из (1.47) и используя тензорные соотношения связи между плотностью тока и компонентами электрического поля, были получены составляющие плотности тока вдоль x и y :

$$j_x = \frac{4IK(e^{-Kx}(6\beta_0 - (\beta_0 + Ky)^3) + 3(\beta_0 + Ky)^2(e^{-Kx} + 1))}{t(\beta_0^4 - (\beta_0 + Ky)^4 + 24K\beta_0 b + 8\beta_0((\beta_0 + Kb)^3 - \beta_0^3))}. \quad (1.49)$$

$$j_y = \frac{4IK(-\beta_0 e^{-Kx}(6\beta_0 - (\beta_0 + Ky)^3) + 3(\beta_0 + Ky)^2(e^{-Kx} + 1))}{t(-\beta_0(\beta_0^4 - (\beta_0 + Ky)^4 + 24K\beta_0 b) + ((\beta_0 + Kb)^3 - \beta_0^3))}. \quad (1.50)$$

Результаты моделирования распределения потенциала в соответствии с выражения (1.48), (1.49), (1.50) представлены на следующих графиках (Рис.1.7 и Рис.1.8)



а)

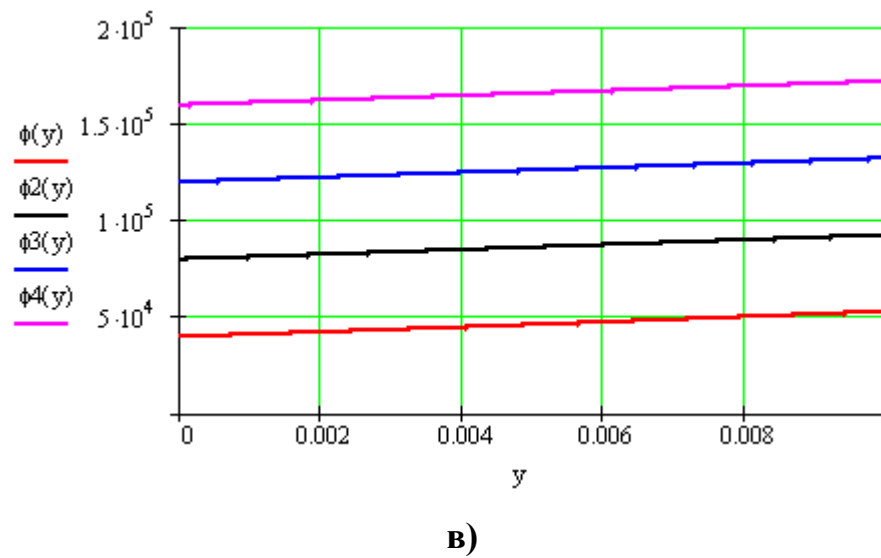
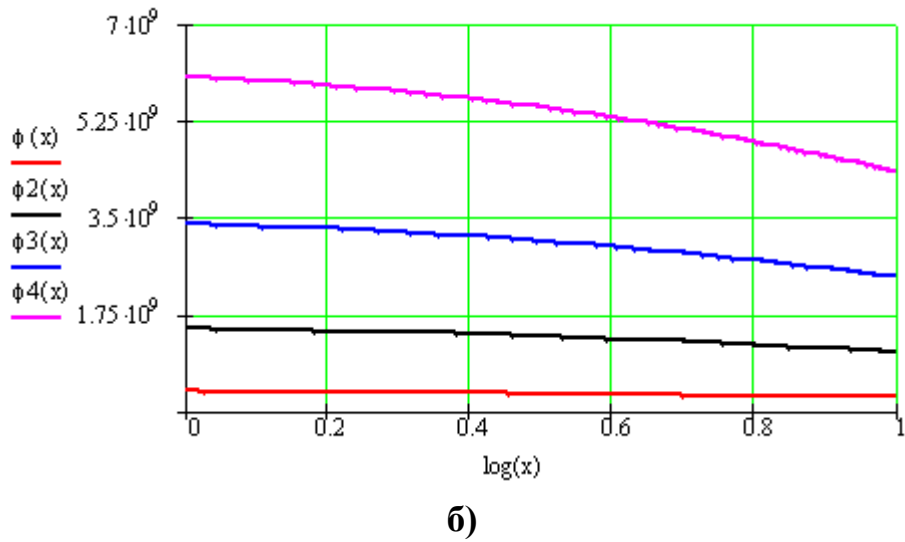
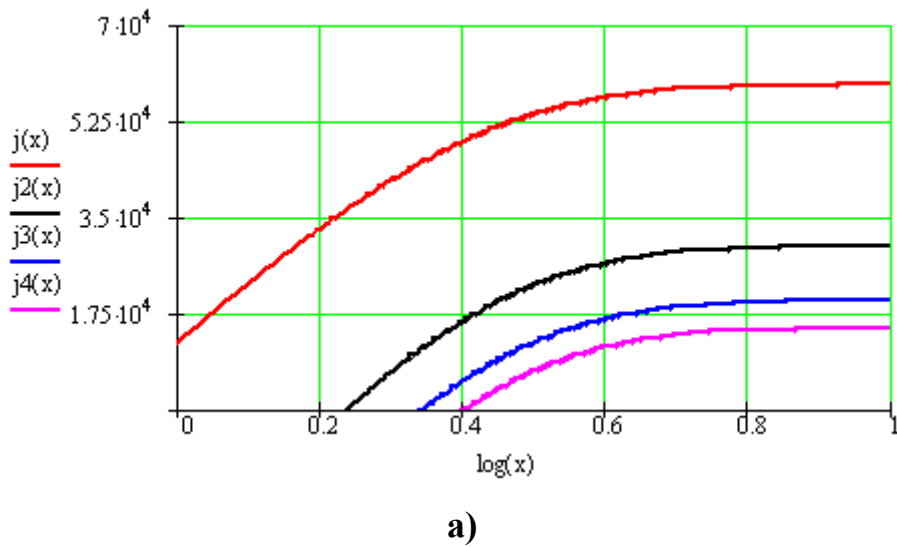
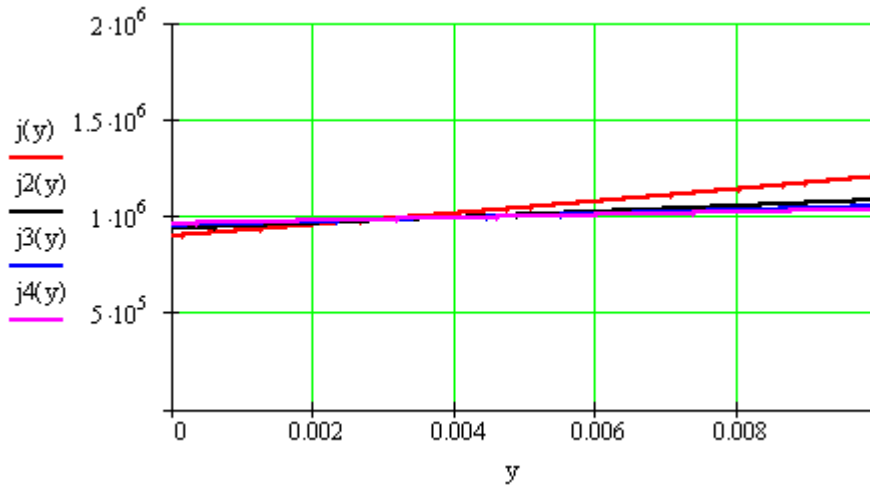
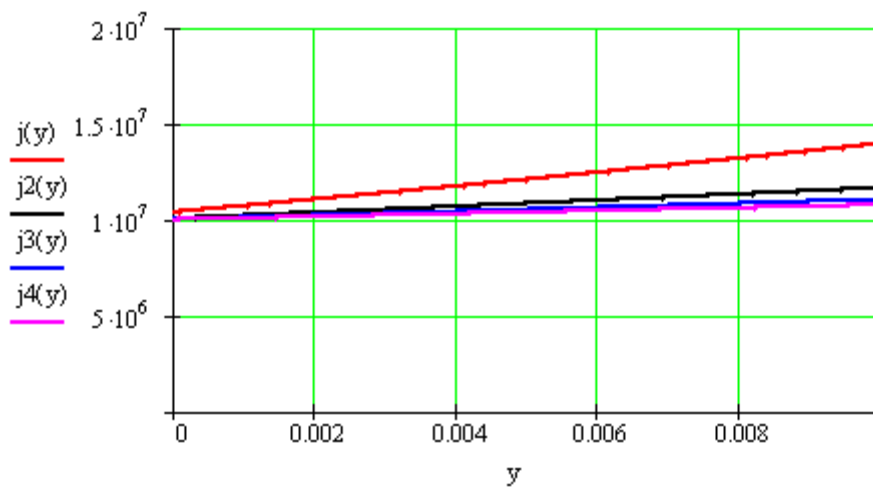


Рис. 1.7. Зависимость потенциала электрического поля φ (а) в направлении протекания тока (б) и перпендикулярно при различных значения K , см^{-1} : (а), (в) 1; (б) 0,1.





б)



в)

Рис. 1.8. Зависимость плотности тока (а) j_x ; (б), (в) j_y в направлении (а) протекания тока; (б) перпендикулярно к протеканию тока при различных значениях K , см^{-1} : (а), (б) 1; (в) 0,1.

Анализ закономерностей пространственного распределения φ показывает, что качественный характер поведения для φ в зависимости от координат x и y остается подобно полученным ранее графикам (Рис. 1.6). Существенно, что плотность тока вдоль транспортного направления j_y является неоднородной характеристикой задачи и особенно сильно изменяется в области малых значений координаты x . Плотность тока вдоль холловского направления не равна нулю и линейно зависит от расстояния до боковой грани.

В качестве последнего шага покажем характер φ при неоднородности поля вдоль холловском направлении. Уравнение Лапласа для произвольного

$$\text{значения } H \text{ выглядит } \varphi_{xx}'' + \varphi_{yy}'' - \frac{2\beta}{1+\beta^2} K\varphi_x' + \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} K\varphi_y' = 0.$$

После упрощения его вид и решение следующие (Рис. 4):

$$\varphi_{xx}'' + \varphi_{yy}'' + K\varphi_x' - \frac{2K}{\beta}\varphi_y' = 0$$

$$\varphi = \frac{I}{tb} \left(1 - \frac{\beta^2}{1+\beta^2} \frac{kb}{2(\beta_0 + kb)} \right)^{-1} \left(x + \frac{\beta}{\beta_0 + kb} \left(\beta_0 y + \frac{ky^2}{2} \right) \right)$$

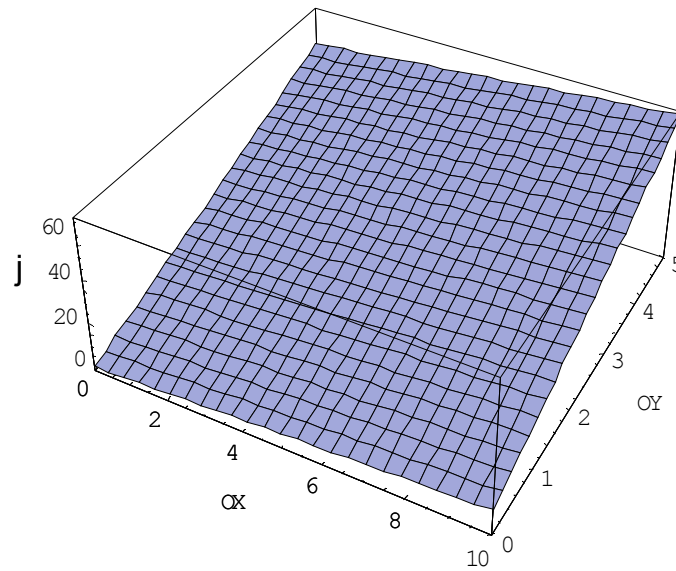


Рис. 1.9. Потенциал φ при неоднородности H в холловском направлении.

Сравнение резистивных свойств проводников при протекании постоянного тока в условиях действия однородного и неоднородного магнитного поля

2.1. Рассеивание энергии в рамках закона Джоуля-Ленца в условиях однородности кинетических коэффициентов

При равенстве нулю внешнего магнитного поля вид проводимости, как кинетического коэффициента связывающего плотность тока с электрическим полем заданным в проводнике, определяется кристаллической структурой материала. Для материалов со сравнительно низкой кристаллической симметрией проводимость является тензорной характеристикой. К таким средам относятся Cd и Zn с гексагональной сингонией. Для материалов с кубической кристаллической решеткой тензор проводимости выражается в скалярную величину. Если его изображают в виде тензора, то он записывается в диагональном виде, для которого все три диагональных элемента одинаковы, а не диагональные элементы равны нулю.

В проводниках удобнее контролировать ток, а не величину электрического и соответственно закон Ома в дифференциальной форме $j = \sigma E$ переписывается как $E = \sigma^{-1} j$.

Для нулевого магнитного поля, в случае кубического материала, обращение тензора проводимости производится просто и компоненты тензора удельного сопротивления, после обращения, также располагаются только по диагональным позициям. Тензор удельного сопротивления, как обратная характеристика тензору проводимости является скаляром. Это означает, что свойства кубических по структуре проводников не сильно зависят от того, находится материал в моно или же в поликристаллическом состоянии.

В соответствии с законом Джоуля-Ленца уровень рассеивания энергии электрического поля и переход ее в тепло вытекает из условия суммирования скалярного произведения векторов плотности тока и напряженности поля. Закон Ома в дифференциальной форме, используемый при этом суммировании, приводит к выражению $W = I^2 R$, где $R = \rho \frac{l}{S}$, R – коэффициент связи между током и выделяемой мощностью в виде тепла.

В случае присутствия однородного поперечного магнитного поля, направленного вдоль оси z , свойства материала изменяются. В присутствии силы Лоренца, воздействие на движущиеся заряды приводит к анизотропии проводящих свойств. Проводимость, будучи первоначально скалярной величиной, превращается в тензор второго ранга. При этом изменяются как диагональные компоненты, так появляются и не диагональные элементы (1.2). Тензор удельного сопротивления в этом случае представляем в виде

$$\rho_{ik} = \frac{1}{\sigma_0} \begin{pmatrix} 1 & \omega\tau & 0 \\ \omega\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Данное макроскопическое явление реализуется в виде широко известного эффекта Холла, когда при протекании тока по пластинчатому проводнику боковые грани в условиях действия поперечного магнитного поля имеют неодинаковые потенциалы.

Затраченная мощность при прохождении тока через длинный образец, прямоугольный в поперечном сечении

$$W = \int jEdS = RI^2. \quad (2.1)$$

Если взять эффективное сопротивление, то предыдущее выражение можно переписать, как

$$L \int jEdS = R_{eff} I^2. \quad (2.2)$$

Легко выразить из предыдущего равенства искомое эффективное сопротивление

$$R_{eff} = \frac{Lt \int j_x E_x dy}{I^2}. \quad (2.3)$$

Плотность тока вдоль протекания тока через проводник выразим с учетом выражения (1.15), полученного ранее

$$j_x = \frac{IK e^{Kb} (e^{Kb} - 1)^{-1}}{t}. \quad (2.4)$$

Предыдущее выражение представим в виде графика, зависимость плотности тока вдоль ОХ от ширины образца (Рис. 2.1)

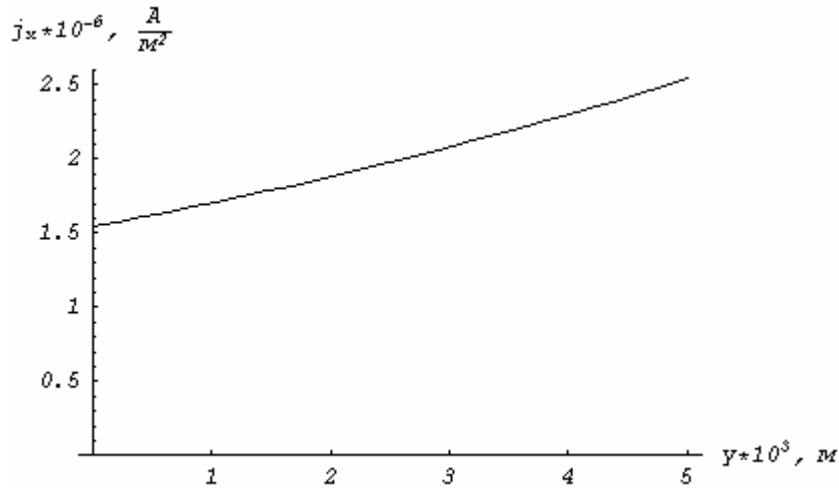


Рис. 2.1. Зависимость плотности тока вдоль оси x от ширины образца.

Из того же условия выразим напряженность электрического поля

$$E_x = \frac{IKe^{Ky} (e^{Kb} - 1)^{-1}}{\sigma_0 t}. \quad (2.5)$$

Подставляя (2.4) и (2.5) в выражение для нахождения эффективного сопротивления (2.3), получим в итоге:

$$R_{eff} = \frac{LK}{2\sigma_0 t} (e^{Kb} - 1)^{-2} (e^{2Kb} - 1). \quad (2.6)$$

Подставим на графике зависимость сопротивления от постоянного коэффициента K , $K = \frac{d\beta}{dx}$:

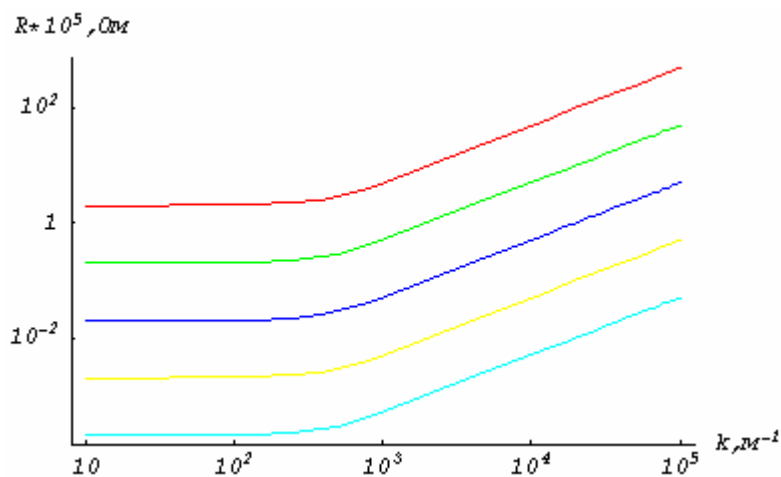


Рис. 2.2. Зависимость эффективного сопротивления от постоянного коэффициента K , при различных значениях ρ , Ом*м: 10^{-8} (1); 10^{-9} (2); 10^{-10} (3); 10^{-11} (4); 10^{-12} (5);.

2.2. Учет эффекта неоднородного распределения плотности тока при градиентом магнитном поле в электрическом сопротивлении

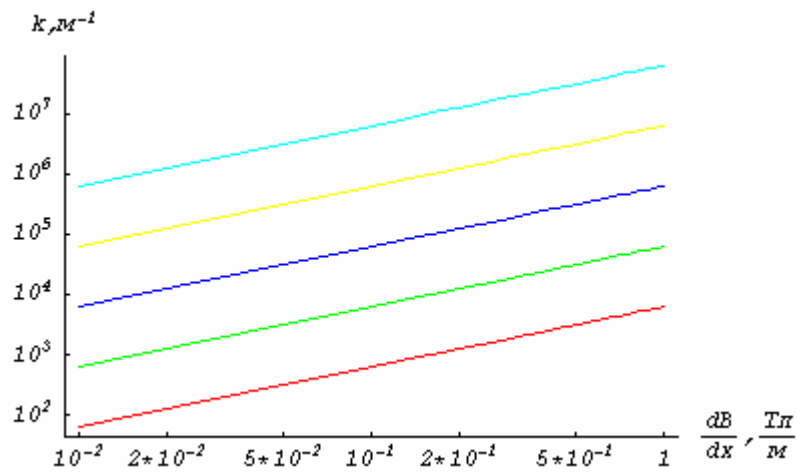


Рис. 2.3. Связь показателя степени неоднородности K для некоторых материалов с величиной градиента магнитного поля $\frac{dB}{dx}, \frac{\text{Тл}}{\text{м}}$ при различных значениях $\rho, \text{Ом}\cdot\text{м}$: 10^{-12} (1); 10^{-11} (2); 10^{-10} (3); 10^{-9} (4); 10^{-8} (5);.

ГЛАВА 3

Влияние диссипации энергии электрического поля на кинетические характеристики

Проанализируем степень влияния теплового взаимодействия проводящих материалов с окружающей средой в явлениях переноса заряда и тепла и в условиях действия поперечного магнитного поля при изотермических и адиабатических условиях. Другими словами, используя приближения сферической поверхности Ферми и Видемана-Франца, требуется оценить масштаб изменения электрического поля, в широком диапазоне температур, и магнитных полей для проводников с металлическим типом проводимости, включая металлы, полуметаллы и вырожденные полупроводники с разбросом характерных значений фермиевской энергии от единиц до тысячных единиц Вольта.

Оценим масштаб влияния термоэлектричества, в присутствии магнитного поля, на изотермический и адиабатический режимы измерения электрического поля в протяженном проводнике с прямоугольным поперечным сечением, который обычно используется в технике эксперимента по изучению кинетических свойств проводников (Рис. 1.1).

3.1. Тепловые эффекты в магнитосопротивлении при изотропном нагреве

В качестве объекта исследования выбран длинный образец, прямоугольный в поперечном сечении. Вдоль параллельной оси OX протекает электрический ток плотностью j_x , постулируемый как однородный по поперечному сечению. Ограниченность проводника в направлении осей OY и OZ допускает использование приближения, что вдоль этих осей ток также отсутствует, т.е. $j_y = j_z = 0$. В качестве дополнительного условия принимается вынужденная теплоизоляция образца, из-за требования нейтрализации механического действия сил Ампера в магнитном поле (Рис. 3.1).

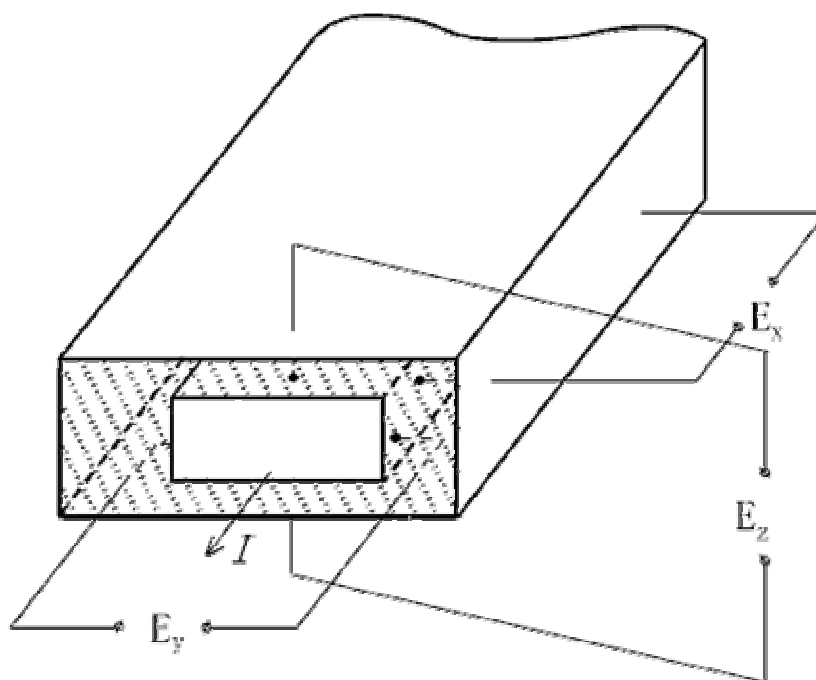


Рис. 3.1. Модельная геометрия организации эксперимента при существовании нейтрализующей поперечной силы диэлектрической оболочки, приводящей к адиабатическим условиям в виду малой теплопроводности изолятора в сравнении с теплопроводностью изучаемого материала.

Рассмотрение выполнено на основе исходных обобщенных уравнений переноса заряда и тепла, которые для изотропной среды имеют вид:

$$\begin{aligned} j &= \sigma E + \beta \frac{dT}{dx} \\ q &= \gamma E + \xi \frac{dT}{dx} \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\sigma, \beta, \gamma, \xi$ – кинетические коэффициенты;

$\frac{dT}{dx}$ – градиент температуры;

E – вектор напряженности электрического поля;

j – вектор плотности тока;

σ – проводимость;

β – коэффициент, связывающий градиент температуры и плотность тока;

γ – коэффициент связи электрического поля и плотности потока тепла;

ξ – коэффициент связи градиента температуры и плотности потока тепла.

3.2. Связь магнито и термоэлектрических явлений при анизотропии тепловода

Для анизотропной среды система уравнений (3.1) записывается в виде тензорных соотношений:

$$\begin{aligned} j_i &= \sum_k \sigma_{ik} E_k + \sum_k \beta_{ik} \frac{dT}{dx_k} \\ q_i &= \sum_k \gamma_{ik} E_k + \sum_k \xi_{ik} \frac{dT}{dx_k} \end{aligned} \quad (3.2)$$

В проводящих средах гораздо удобнее контролировать электрический ток, чем электрическое поле. В этой связи, систему уравнений (3.1) трансформируют к виду, где независимыми переменными являются плотность тока и градиент температуры:

$$\begin{aligned} E_i &= \sum_k \rho_{ik} j_k + \sum_k Q_{ik} \frac{dT}{dx_k} \\ q_i &= \sum_k \Pi_{ik} j_k - \sum_k k_{ik} \frac{dT}{dx_k} \end{aligned} \quad (3.3)$$

здесь $i, k = x, y, z$;

E_i, q_i – компоненты векторов напряженности электрического поля и плотности теплового потока вдоль i -го направления декартовой системы координат;

ρ_{ik} – компоненты тензора электрического сопротивления;

Q_{ik} – компоненты тензора термоэлектродвижущей силы;

k_{ik} – компоненты тензора теплопроводности;

Π_{ik} – компоненты тензора, описывающего эффект Пельтье;

$\frac{dT}{dx_k}$ – градиент температуры вдоль одного из направлений.

В силу соотношений симметрии Онзагера для кинетических коэффициентов систем уравнений (3.2) и (3.3) существует связь:

$$\begin{aligned} \rho_{ik} &= \sigma_{ik}^{-1} \\ k_{ik} &= \xi_{ik} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} Q_{ik} &= -\sum_i \rho_{il} \beta_{lk} \\ k_{ik} &= \frac{k^2 \pi^2 T}{3e^2} \sigma_{ik} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{ik} &= \sum_i \gamma_{il} \rho_{lk}, \\ \gamma_{ik} &= -T \beta_{ki}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

В приближении закона дисперсии электронного газа, отвечающего сферическому типу, тензоры проводимости и термоэлектрической составляющей записывают как:

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} &= \sigma_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{1+(\omega\tau)^2} & \frac{\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2} & 0 \\ -\frac{\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2} & \frac{1}{1+(\omega\tau)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \beta_{ik} &= \beta_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{1+(\omega\tau)^2} & \frac{\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2} & 0 \\ -\frac{\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2} & \frac{1}{1+(\omega\tau)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

при этом:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{ne^2\tau}{m}, \\ \beta_0 &= \frac{k^2\pi^2T}{3e} \frac{\sigma_0}{\mu}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

здесь σ_0 – проводимость в нулевом магнитном поле;

β_0 – коэффициент связи плотности тока с градиентом температуры в нулевом магнитном поле;

n – концентрация электрона;

μ – энергия Ферми.

В общем виде, с учетом наведенной магнитным полем анизотропии, выражение для электрического поля Холла в присутствии термоэлектрического вклада можно представить как:

$$\begin{aligned}
E_x &= \rho_{xx}j_x + \rho_{xy}j_y + \rho_{xz}j_z + Q_{xx} \frac{dT}{dx} + Q_{xy} \frac{dT}{dy} + Q_{xz} \frac{dT}{dz} \\
E_y &= \rho_{yx}j_x + \rho_{yy}j_y + \rho_{yz}j_z + Q_{yx} \frac{dT}{dx} + Q_{yy} \frac{dT}{dy} + Q_{yz} \frac{dT}{dz} \cdot \\
E_z &= \rho_{zx}j_x + \rho_{zy}j_y + \rho_{zz}j_z + Q_{zx} \frac{dT}{dx} + Q_{zy} \frac{dT}{dy} + Q_{zz} \frac{dT}{dz}
\end{aligned} \quad (3.9)$$

С учетом действия тепловых сил на движущиеся частицы выражение (9), следует замкнуть соотношениями по переносу тепла:

$$\begin{aligned}
q_x &= \Pi_{xx}j_x + \Pi_{xy}j_y + \Pi_{xz}j_z - k_{xx} \frac{dT}{dx} - k_{xy} \frac{dT}{dy} - k_{xz} \frac{dT}{dz} \\
q_y &= \Pi_{yx}j_x + \Pi_{yy}j_y + \Pi_{yz}j_z - k_{yx} \frac{dT}{dx} - k_{yy} \frac{dT}{dy} - k_{yz} \frac{dT}{dz} \cdot \\
q_z &= \Pi_{zx}j_x + \Pi_{zy}j_y + \Pi_{zz}j_z - k_{zx} \frac{dT}{dx} - k_{zy} \frac{dT}{dy} - k_{zz} \frac{dT}{dz}
\end{aligned} \quad (3.10)$$

Используя условия адиабатичности для всех компонент теплового потока, легко получить выражение для компонент градиента температуры вдоль осей декартовой системы:

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dx} &= \frac{(k_{xy}\Pi_{yx} - k_{yy}\Pi_{xx})}{k_{yx}k_{xy} - k_{yy}k_{xx}} j_x \\
\frac{dT}{dy} &= \frac{(k_{yx}\Pi_{xx} - k_{xx}\Pi_{yx})}{k_{yx}k_{xy} - k_{yy}k_{xx}} j_x \cdot \\
\frac{dT}{dz} &= \frac{\Pi_{zx}}{k_{zz}} j_x
\end{aligned} \quad (3.11)$$

Используя соотношения связи между теплопроводностью, электропроводностью и другими коэффициентами (3.5, 3.6, 3.7, 3.8) определим вид тензоров Π_{xx} , Π_{yx} , Π_{zx} :

$$\begin{aligned}
\Pi_{xx} &= -T \frac{\beta_0}{\sigma_0} \frac{1 - (\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2} \\
\Pi_{yx} &= -T \frac{\beta_0}{\sigma_0} \frac{2\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \cdot \\
\Pi_{zx} &= 0
\end{aligned} \quad (3.12)$$

Соответственно температурные градиенты вдоль направлений декартовой системы координат, обусловленные отсутствием составляющих плотности теплового потока можно представить как:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dx} &= \frac{3\beta_0 e^2}{k^2 \pi^2 \sigma_0^2} \left(\frac{3(\omega\tau)^2 - 1}{1 + (\omega\tau)^2} \right) j_x \\ \frac{dT}{dy} &= \frac{3\beta_0 e^2}{k^2 \pi^2 \sigma_0^2} \left(\frac{\omega\tau((\omega\tau)^2 - 3)}{1 + (\omega\tau)^2} \right) j_x, \\ \frac{dT}{dz} &= 0\end{aligned}\tag{3.13}$$

Анализ первой формулы выражения (3.13) показывает, что градиент температуры вдоль направления протекания тока является четной функцией, что означает неизменность ее при операции инвертирования направления внешнего магнитного поля. При этом изменение величины магнитного поля от нулевых до асимптотически больших значений показывает, что в слабых полях градиент температуры вдоль координаты x противоположен направлению тока. Электроны движутся в область с большей температурой. В диапазоне сильных полей, начиная с $\omega\tau > \frac{1}{\sqrt{3}}$, градиент температуры вдоль координаты x изменяет знак. Чтобы избежать паразитного воздействия градиентного вклада на измеряемые характеристики, следует при измерении физических параметров (например, концентрации носителей на основе эффекта Холла) по возможности выбирать условия по магнитному полю близкие к значениям $\omega\tau > \frac{1}{\sqrt{3}}$ и занулением градиента.

В холловском направлении выражение для градиента dT/dy показывает, что при малых величинах магнитного поля (поле стремится к нулю) этот градиент исчезает, вплоть до граничного значения $\omega\tau = \sqrt{3}$. Существенно, что при значении параметра $\omega\tau = \sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}$ градиент максимален по модулю. Большие значения эффективного магнитного поля приводят к смене знака градиента dT/dy и его росту с увеличением магнитного поля. Проведенное рассуждение указывает, что в магнитном поле холловские эффекты проявляются в температурном распределении. Исключить вредное воздействия джоулевого тепла можно выбором условий по магнитному полю вблизи точек инверсии знака градиента.

В данных условиях компоненты тензора электродвижущей силы:

$$\begin{aligned}Q_{yx} &= 0 \\ Q_{yy} &= -\frac{\beta_0}{\sigma_0}.\end{aligned}\tag{3.14}$$

С учетом полученных соотношений (3.11), вид составляющей электрического поля вдоль потока заряда (E_x) и поперек тока (E_y) отвечает следующей форме записи:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{j_x}{\sigma_0} \left(1 - \frac{3\beta_0^2 e^2}{k^2 \pi^2 \sigma_0^2} \left(\frac{3(\omega\tau)^2 - 1}{1 + (\omega\tau)^2} \right) \right) \\ E_y &= \frac{j_x(\omega\tau)}{\sigma_0} \left(1 - \frac{3\beta_0^2 e^2}{k^2 \pi^2 \sigma_0^2} \left(\frac{(\omega\tau)^2 - 3}{1 + (\omega\tau)^2} \right) \right). \\ E_z &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Сначала проанализируем полученные соотношения в двух предельных случаях. В приближении сильного магнитного поля ($\omega\tau \gg 1$) поперечные магнитному полю составляющие электрического поля выглядят:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{j_x}{\sigma_0} \left(1 - \frac{9\beta_0^2 e^2}{k^2 \pi^2 \sigma_0^2} \right) \\ E_y &= \frac{j_x(\omega\tau)}{\sigma_0} \left(1 - \frac{3\beta_0^2 e^2}{k^2 \pi^2 \sigma_0^2} \right), \\ E_z &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

С учетом явного вида коэффициентов σ_0 и β_0 соотношения (3.16) можно представить как

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{m}{ne^2\tau} \left(1 - \frac{k^2 \pi^2 T^2}{\mu^2} \right) j_x \\ E_y &= \frac{B}{ne} \left(1 - \frac{k^2 \pi^2 T^2}{3\mu^2} \right) j_x \\ E_z &= 0 \end{aligned} \quad (3.16')$$

В условиях слабого магнитного поля ($\omega\tau \ll 1$), электрические компоненты отличаются от полученных ранее. Для случая асимптотически слабого магнитного поля:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{j_x}{\sigma_0} \left(1 + \frac{3\beta_0^2 e^2}{k^2 \pi^2 \sigma_0^2} \right) \\ E_y &= \frac{j_x(\omega\tau)}{\sigma_0} \left(1 + \frac{9\beta_0^2 e^2}{k^2 \pi^2 \sigma_0^2} \right), \\ E_z &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Учет зависимости коэффициентов от концентрации носителей заряда, времени свободного пробега, энергии Ферми, температуры позволяет представить электрические компоненты как

$$\begin{aligned}
 E_x &= \frac{m}{ne^2\tau} \left(1 + \frac{k^2\pi^2T^2}{3\mu^2} \right) j_x \\
 E_y &= \frac{B}{ne} \left(1 + \frac{k^2\pi^2T^2}{\mu^2} \right) j_x \\
 E_z &= 0
 \end{aligned} \tag{3.17'}$$

Полученные выражения (3.16) и (3.17) отображают масштаб величины электрического поля Холла в общем случае. При этом первый член выражений (3.16) и (3.17) отвечает за изотермические процессы, а вклад от адиабатического фактора представлен в виде дроби, которая является отношением тепловой энергии к энергии Ферми. Анализ показывает, что при низких температурах для сред, обладающих хорошей проводимостью (концентрация носителей заряда порядка 10^{28} м^{-3} , энергия Ферми около 1 эВ), вклад адиабатичности в поле Холла незначителен. Такая ситуация будет иметь место для нормальных металлов. Характерно, что при высоких температурах поправка, вследствие адиабатичности, для указанных материалов, не превысит 0,1%. Ситуация существенно изменяется для материалов, обладающих меньшей концентрацией электронов проводимости, при условии вырождения их электронной подсистемы. Так для материалов, называемых полуметаллами (Bi, Sb), число электронов проводимости составляет 10^{-5} на атом, эффект-масса имеет порядок 0.01-0.1 массы электрона, энергия Ферми порядка нескольких сотых электрон-вольт. Для подобных материалов, а также для сильнолегированных полупроводников поправочный элемент из-за нарушения условия изотермичности может существенно возрасти, приводя к большой систематической ошибке эксперимента.

На Рис. 3.2. представлен сравнительный график поведения составляющей электрического поля E_x вдоль потока заряда для двух предельных случаев проводников по концентрации носителей заряда. Выбрано несколько типичных значений магнитного поля, а именно при $B1=6$ Тл, $B2=0,1$ Тл, $B3=0$ Тл, $B4=2$ Тл, $B5=4$ Тл.

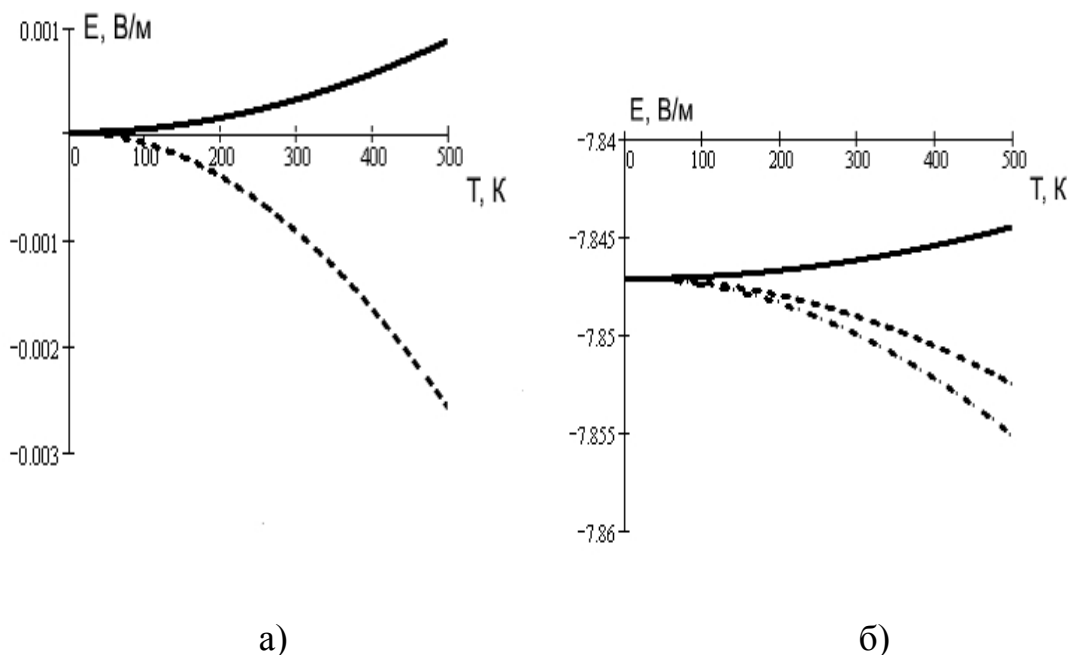


Рис. 3.2. Зависимость напряженности поля E_x от температуры T : а) при $n = 10^{23}$, $m = 9,1 \cdot 10^{-33}$ кг, $\mu = 0,01$ эВ; б) при $n = 10^{28}$, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, $\mu = 1$ эВ.
 ———— — $B3 = 0$ Тл, - - - - - — $B2 = 0,1$ Тл, — · — · — при остальных значениях магнитного поля.

Как видно из графика Рис 3.2. а) при $B3 = 0$ Тл напряженность поля E_x возрастает при увеличении T , во всех остальных случаях E_x убывает. На Рис. 3.2. б) все аналогично, но кроме этого кривая при $B3 = 0$ Тл имеет положительное значение, а при всех остальных случаях – отрицательное. Итак, в отсутствии магнитного поля электрическое поле возрастает, а в его присутствии – убывает. Это явление можно проинтерпретировать, как результат действия адиабатических условий по направлениям вдоль магнитного поля и поперек него.

Заключение

Выполненный расчет и сопоставление результатов моделирования, распределения электрического потенциала для постоянного тока в длинном проводнике прямоугольного сечения, с экспериментальными данными показывают, что метод разделения переменных позволяет в первом приближении определить характер протекания тока при действии градиентного поперечного магнитного поля на движущиеся заряды. Для длинного образца с прямоугольным поперечным сечением, при сравнительной малости толщины по отношению к ширине, целесообразно использовать для определения потенциала электрического поля модифицированное дифференциальное уравнение 2-го порядка в частных производных, предполагая двумерность электрических свойств объемного проводника. Установлено, что при направлении градиента магнитного поля, как вдоль транспортного направления, так и поперек к нему, приводит к нелинейной зависимости потенциала электрического поля от координат в плоскости нормальной магнитному полю. Это означает неоднородность распределения потока зарядов по объему, т.е. не только существование транспортного и холловского тока, но и направленное изменение этих токов при смещении точки наблюдения от одной холловской грани до другой. Такое распределение плотности тока свидетельствует о вихревой структуре тока проводимости в стационарном электрическом поле, что является следствием зависимости проводящих свойств материала от градиентного магнитного поля.

Расчет общей зависимости температурных градиентов в длинных проводниках с прямоугольным сечением показывает, что выделение джоулевого тепла может привести к перераспределению температурного поля, т.е. к зависимости температуры от поперечных координат по отношению к току проводимости. Степень джоулевого разогрева возрастает с увеличением магнитного поля, в виду диагональной компоненты тензора сопротивлений. Поперечное току магнитное поле увеличивает вклад термоэлектрической компоненты в регистрируемое электрическое поле.

Учет качественного поведения градиентных составляющих для E_x и E_y (3.15) показывает, область параметров эффективных значений, при котором вредное влияние разогревных процессов на величину измеряемых электрических полей, будет минимальным. По существу, даже при больших плотностях тока и сильном джоулевом разогреве, при ограниченности теплоотвода, выбором величины магнитного поля можно реализовать условие изотермичности и минимизировать погрешность измерения.

Список литературы

1. Блат Ф. Физика электронной проводимости в твердых телах. Москва, Мир, 1971. 470 с.
2. Абрикосов А.А. Основы теории металлов. Москва, Наука, 1987. 520 с.
3. Соболев В.Р., Мазуренко О.Н., Дрозд А.А. Магнитодинамика электронов проводимости Al в неоднородном поле // Физика низких температур. – 1995. – Т. 21, №1. – с. 75 – 85.
4. Соболев В.Р., Мазуренко О.Н., Дрозд А.А. Магнитостимулированная неоднородность проводимости и нелокальные явления переноса в металлах // Физика низких температур, 1999, Т. 25, №11, с. 1211 – 1217.
5. Соболев В.Р., Мазуренко О.Н. Магнитное сжатие линий тока в металлах // Актуальные проблемы физики твердого тела. Сборник статей. Минск, «Беларуская навука», 2003, с. 462 – 474.
6. Соболев В.Р., Мазуренко О.Н. Электродинамика криопроводников в неоднородном стационарном магнитном поле // Минск: Беларуская навука, 2003.–198 с.